



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Οκτωβρίου 2013

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} .$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} = 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{16}{9} \cdot 8 - \frac{74}{9} \\ &= 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{128}{9} - \frac{74}{9} = 94 + \frac{54}{9} = 94 + 6 = 100. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.

(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.

(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Λύση

(α) Μετά την αγορά τροφίμων έμειναν στον οικογενειάρχη 1360 ευρώ. Αυτά τα χρήματα αποτελούν το 85% των χρημάτων που του έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή. Άρα το 85% αντιστοιχεί σε ποσόν 1360 ευρώ, οπότε το ποσόν που του έμεινε μετά την αγορά του υπολογιστή είναι

$$1360 \cdot \frac{100}{85} = \frac{16 \cdot 100}{1} = 1600 \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

το $(100 - 20)\% = 80\%$ του ποσού που πήρε αντιστοιχούν σε 1600 ευρώ.

Άρα τα χρήματα που πήρε από την τράπεζα είναι:

$$1600 \cdot \frac{100}{80} = 2000 \text{ ευρώ.}$$

(β) Τα τρόφιμα στοίχισαν το 15% των χρημάτων που έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή, δηλαδή

$$1600 \cdot \frac{15}{100} = 240 \text{ ευρώ.}$$

Το ποσό αυτό μπορεί να βρεθεί και με την αφαίρεση: $1600 - 1360 = 240$.

(γ) Ο οικογενειάρχης από τα 2000 ευρώ που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε

$2000 - 1360 = 640$ ευρώ, δηλαδή ποσοστιαία επί τις εκατό

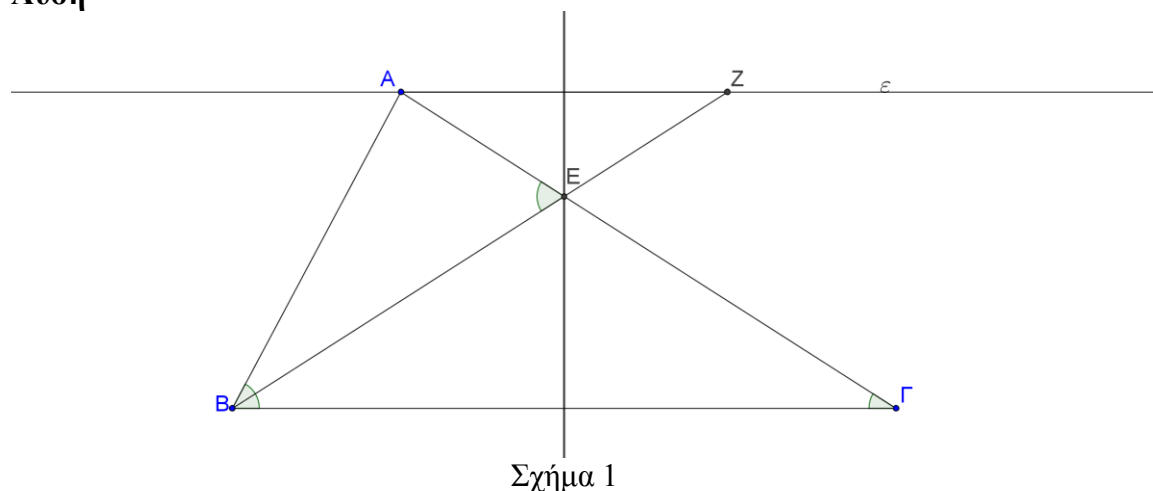
$$\frac{640}{2000} \cdot 100 = \frac{64}{2} = 32.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E και η ευθεία BE τέμνει την ευθεία ε , που περνάει από το σημείο A και είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$, στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

(α) $AZ = AB$, (β) $\hat{AEB} = \hat{B}$.

Λύση



(α) Επειδή το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετη της $B\Gamma$ έπεται ότι $EB = E\Gamma$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $EB\Gamma$ προκύπτει $\hat{EB\Gamma} = \hat{\Gamma}$. Επειδή $AZ \parallel B\Gamma$ έπεται ότι: $\hat{EB\Gamma} = \hat{AZB}$ (εντός εναλλάξ γωνίες). Από τη σχέση της υπόθεσης $\hat{B} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$, έχουμε:

$$\hat{AZB} = \hat{EB\Gamma} = \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} = \hat{ABZ}.$$

Άρα το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές με $AB = AZ$.

(β) Η γωνία $\hat{AEB}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $EB\Gamma$, οπότε

$$\hat{AEB} = \hat{EB\Gamma} + \hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{\Gamma} = \hat{B}.$$

Πρόβλημα 4

Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το

18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του

υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω α, β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, Τότε θα είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\nu \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \nu.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων)}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\nu) = 7 \cdot (108 + \nu) \Leftrightarrow \text{(από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\nu = 756 + 7\nu \Leftrightarrow 18\nu = 36 \Leftrightarrow \nu = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110.$$

2^{ος} τρόπος.

Έχουμε: $\alpha = 18 \cdot 8 + \nu_1$, με $\nu_1 = 0, 1, 2, \dots, 17$ και $\beta = 12 \cdot 9 + \nu_2$, με $\nu_2 = 0, 1, 2, \dots, 11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\nu_1 = 5\nu_2$ είναι τα :

$$(\nu_1, \nu_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10,2)$ μας δίνει $\alpha = 154$ και $\beta = 110$ και το κλάσμα

$$\frac{154}{110} \text{ που είναι ισοδύναμο με το } \frac{7}{5}.$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Λύση

Έχουμε: $4 < 5$, οπότε $\sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5}$. Είναι

$2,1^2 = 4,41, 2,2^2 = 4,84$ και $2,3^2 = 5,29$, οπότε η ζητούμενη τιμή του α είναι $\alpha = 2,2$.

Με αντικατάσταση βρίσκουμε: $A = 2$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}.$$

Λύση

Έχουμε $-4 < 1 - 2\beta < 5 \Leftrightarrow -5 < -2\beta < 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{2} < \frac{-2\beta}{-2} < \frac{-5}{-2} \Leftrightarrow -2 < \beta < \frac{5}{2}$. Επειδή ο

β είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\beta = 1$ ή $\beta = 2$.

- Για $\beta = 1$ η ανίσωση γίνεται: $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < x \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < x \Leftrightarrow x > 1$.
- Για $\beta = 2$ η ανίσωση γίνεται:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow 0 \cdot x < -1, \text{ η οποία είναι αδύνατη.}$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O \psi$ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi' \chi$ γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2, -6)$. Το σημείο A ανήκει στον άξονα $\chi' \chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο B ανήκει στον άξονα $\psi' \psi$ και στην ευθεία (ε).

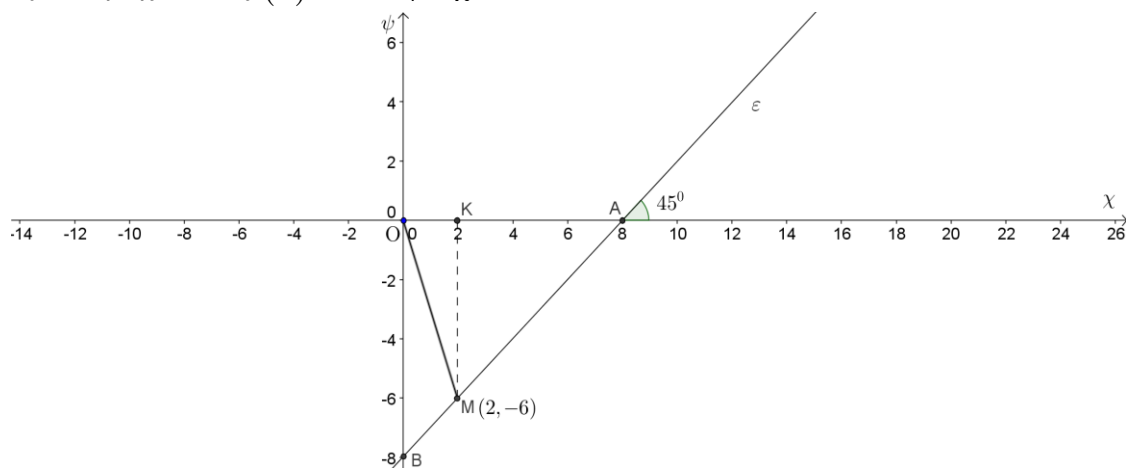
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B και το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAM.

Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή $\psi = \alpha\chi + \beta$, όπου $\alpha = \tan 45^\circ = 1$. Επειδή η ευθεία περνάει από το σημείο $M(2, -6)$ έχουμε ότι $-6 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -8$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $\psi = \chi - 8$



Σχήμα 2

β) Τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τους άξονες $\chi' \chi$ και $\psi' \psi$ είναι τα $A(8, 0)$ και $B(0, -8)$, αντίστοιχα. Άρα έχουμε

$$(OAB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

γ) Αν K είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2, 0)$, τότε το τρίγωνο KMA είναι ορθογώνιο στο K και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη $KM = 6$ και $KA = 6$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε

$$AM = \sqrt{KM^2 + KA^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Ομοίως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAB λαμβάνουμε:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα OAM και OAB έχουν κοινό ύψος από την κορυφή O, έστω $υ$, έχουμε:

$$(\text{OAM}) = \frac{3}{4}(\text{OAB}) = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

Παρατήρηση

Το εμβαδό του τριγώνου OAM μπορεί να υπολογιστεί παρατηρώντας ότι το KM είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά OA (του τριγώνου OAM).

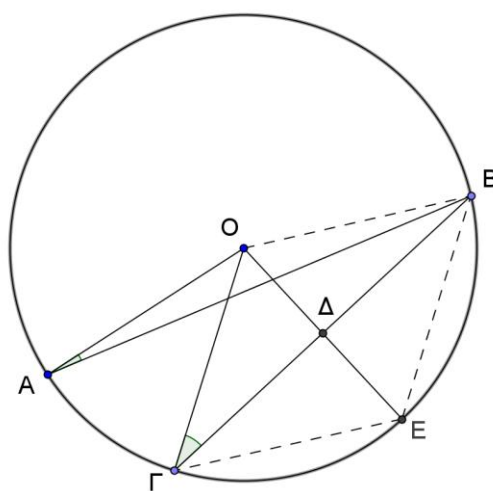
Οπότε: $(OAM) = \frac{1}{2} KM \cdot OA = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 = 24$.

4. Σε κύκλο $c(O, R)$ (κέντρου O και ακτίνας R) δίνονται σημεία A , Γ και B τέτοια ώστε $\widehat{OAB} = 10^\circ$ και $\widehat{O\Gamma B} = 30^\circ$. Τα σημεία A και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία OB . Από το σημείο O φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓB που την τέμνει στο σημείο Δ , ενώ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο E .

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ και το μέτρο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές ($ΟΑ = ΟΒ = R$), έπεται ότι:

$$\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 10^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές ($ΟΓ = ΟΒ = R$), έπεται ότι:

$$\angle \Gamma \hat{O} B = \angle \hat{O} B \Gamma = 30^\circ.$$

Άρα έχουμε: $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{O\hat{B}\Gamma} - \widehat{O\hat{B}A} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$ και $\widehat{A\Gamma} = 40^\circ$.

(β) Το ύψος του τριγώνου ΟΓΒ είναι και διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{O}B$,
 οπότε $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ - O\hat{I}\Delta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, οπότε θα είναι και $\Gamma\hat{O}E = 60^\circ$. Άρα το
 τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισόπλευρο, οπότε $\Gamma E = O\Gamma = R$. Επειδή η ευθεία ΟΕ είναι

μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $EB = GE = R$, οπότε το τετράπλευρο OBEΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $OD = OG \cdot \eta\mu 30^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$, και $GD = OG \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ οπότε

$$(OBE\Gamma) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Παρατήρηση

Ο ρόμβος OBEΓ, αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς R που το κάθε

ένα από αυτά (τα τρίγωνα) έχει εμβαδό $\frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$. Άρα το εμβαδό του ρόμβου θα είναι:

$$(OBE\Gamma) = 2 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ και } (\Sigma_2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{array} \right\}$$

έχουν την ίδια λύση (x, y) , να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β .

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{x} = \varphi$ και $\frac{1}{y} = \omega$, το σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = \frac{1}{4} \\ 3\varphi + 4\omega = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ 3\left(\frac{1}{4} - \omega\right) + 4\omega = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \\ \omega = -\frac{1}{4} \end{array} \right\},$$

οπότε το σύστημα (Σ_1) έχει τη λύση: $(x, y) = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}\right) = (2, -4)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα (Σ_2) , οπότε θα έχουμε;

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha - 4\beta = 4 \\ 4\alpha - 12\beta = -8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha - 3\beta = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ -\beta = -4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 10 \\ \beta = 4 \end{array} \right\}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \quad \text{και} \quad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.

Λύση

(α) Επειδή $z = 3(x - y) > 0 \Rightarrow x - y > 0$, έπεται ότι $x > y$.

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z = 2(x + y) = 3(x - y) \Leftrightarrow 2x + 2y = 3x - 3y \Leftrightarrow x = 5y,$$

οπότε προκύπτει: $z = 2x + 2y = 12y$, οπότε $z - x = 12y - 5y = 7y > 0$, οπότε $z > x$.

Άρα έχουμε: $z > x > y \Leftrightarrow y < x < z$.

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι $y > 0$, έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 680 \Leftrightarrow 25y^2 + y^2 + 144y^2 = 680 \Leftrightarrow 170y^2 = 680 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Άρα είναι: $(x, y, z) = (10, 2, 24)$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A = 8x + 1$ και $B = 2x - 3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Λύση

Έστω $A = 8x + 1 = \alpha^2$ και $B = 2x - 3 = \beta^2$. Τότε λαμβάνουμε ότι:

$$x = \frac{\alpha^2 - 1}{8} = \frac{\beta^2 + 3}{2} \quad (1)$$

και

$$\alpha^2 - 4\beta^2 = 13. \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

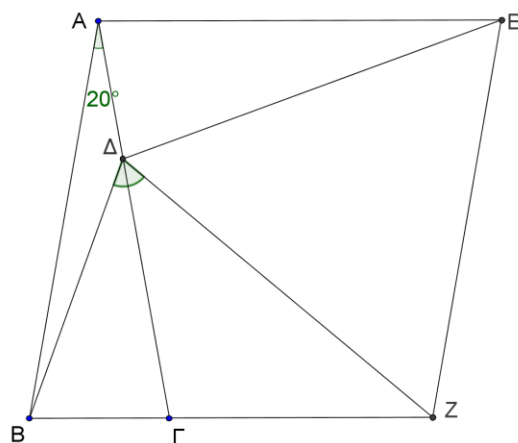
$$\begin{aligned} \alpha^2 - 4\beta^2 = 13 &\Leftrightarrow (\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) = 13 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 13 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = -13 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 13 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha - 2\beta = -13 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (7, 3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (-7, -3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (7, -3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (-7, 3). \end{aligned}$$

Από όλα τα παραπάνω ζεύγη, από τις σχέσεις (1), προκύπτει ότι: $x = 6$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 20^\circ$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Από το σημείο A φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα AE τέτοιο ώστε $AE \parallel B\Gamma$, $AE = AB$ και με τα σημεία E και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία AB . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $BAEZ$. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $B\hat{\Delta}Z$.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή είναι $\hat{A} = 20^\circ$ και $AE \parallel B\Gamma$ έχουμε ότι:

$$\hat{E\Delta A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta A$ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($AB = EA$, $B\Gamma = A\Delta$) και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες ($\hat{A\hat{B}\Gamma} = \hat{E\hat{A}\Delta} = 80^\circ$).

Επομένως, έχουμε: $E\Delta = A\Gamma = AB$, $\hat{A\hat{E}\Delta} = 20^\circ$.

Επειδή το παραλληλόγραμμο $BAEZ$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ($AE = AB$), είναι ρόμβος, οπότε $EZ = AB = E\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές. Επιπλέον, ισχύει: $\hat{A\hat{E}Z} = \hat{B} = 80^\circ$. Επομένως $\hat{\Delta\hat{E}Z} = \hat{A\hat{E}Z} - \hat{A\hat{E}\Delta} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισόπλευρο.

Τότε είναι: $\hat{B\hat{Z}\Delta} = \hat{B\hat{Z}E} - \hat{\Delta\hat{Z}E} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $BZ\Delta$ ($ZB = AB = Z\Delta$) προκύπτει ότι: $\hat{B\hat{\Delta}Z} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 + 3x + 1}{x} - \frac{27x}{9x^2 + 3x + 1} \geq 6.$$

Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή είναι $x > 0$ θα είναι και $9x^2 + 3x + 1 > 0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}
& (9x^2 + 3x + 1)^2 - 27x^2 \geq 6x(9x^2 + 3x + 1) \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 3x + 1)^2 - 6x(9x^2 + 3x + 1) - 27x^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - 27x^2 \geq 0. \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 1)^2 - 9x^2 - 27x^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 1)^2 - 36x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (9x^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}
\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, αφού $x > 0$.

Πρόβλημα 2

Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = \beta$.

Λύση

Αφού οι αριθμοί 1 και β είναι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (1)$$

$$\alpha\beta^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \quad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\alpha(\beta^2 - 1) + \beta(\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow (\beta - 1)(\alpha\beta + \alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \alpha\beta + \alpha + \beta = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι είναι $\beta = 1$, τότε $\alpha + \gamma = -1$ και $\alpha + \gamma = 0$, αδύνατο.

Άρα είναι $\beta \neq 1$, οπότε θα είναι:

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\beta}{\beta + 1} = -1 + \frac{1}{\beta + 1}.$$

Επειδή $\alpha \in \mathbb{Z}$ πρέπει: $\frac{1}{\beta + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta \in \{-2, 0\}$. Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\beta = 0$, οπότε έχουμε: $\alpha + \gamma = 0$ και $\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0$, το οποίο απορρίπτεται αφού από την υπόθεση έχουμε $\alpha \neq 0$.
- $\beta = -2$, οπότε έχουμε $\alpha + \gamma = 2$ και $4\alpha + \gamma = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2, \gamma = 4$. Επομένως προκύπτει η τριάδα συντελεστών $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, -2, 4)$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Λύση

Θέλουμε να βρούμε για ποιους θετικούς ακεραίους λ έχει λύση ως προς x η εξίσωση

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2} = \lambda \Leftrightarrow (2 - \lambda)x^2 + (1 + \lambda)x - 2(2 + \lambda) = 0.$$

Αν $\lambda = 2$ προκύπτει από την εξίσωση η λύση $x = \frac{8}{3}$.

Αν $\lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση ως προς x , αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta = (\lambda + 1)^2 + 8(4 - \lambda^2) = -7\lambda^2 + 2\lambda + 33 = (-\lambda^2 + 2\lambda) + (33 - 6\lambda^2),$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda \geq 3$ και οι δύο παρενθέσεις είναι αρνητικές, οπότε $\Delta < 0$. Επομένως, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, διάφορος του 2, έπεται ότι: $\lambda = 1$. Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{7}$.

Άρα για $x = \frac{8}{3}$ το κλάσμα παίρνει την ακέραια τιμή 2 και για $x = -1 \pm \sqrt{7}$ παίρνει την ακέραια τιμή 1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B, AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O, R)$ στο σημείο A . Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O, R)$ στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K, A, M, N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

Έστω T το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων C_A και C_B . Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία T, A, Γ είναι συνευθειακά.

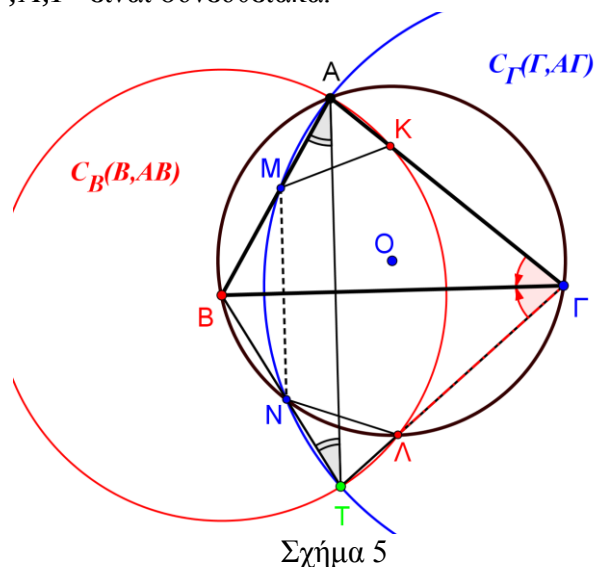
Οι χορδές BA και BA του κύκλου C είναι ίσες μεταξύ τους, διότι είναι ακτίνες του κύκλου C_A , οπότε οι εγγεγραμμένες (στο κύκλο C) γωνίες που βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα, θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$\widehat{B\Gamma A} = \widehat{B\hat{\Gamma}A} = \hat{\Gamma} \quad (1).$$

Η $B\Gamma$ είναι διάκεντρος των κύκλων C_B και C_Γ , οπότε θα είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής AT και θα διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Gamma}T$, δηλαδή

$$\widehat{B\hat{\Gamma}A} = \widehat{B\hat{\Gamma}T} = \hat{\Gamma} \quad (2).$$

Άρα τα σημεία T, A, Γ είναι συνευθειακά.



Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία T, N, B είναι συνευθειακά.

Το τρίγωνο BAT είναι ισοσκελές ($BA=BT$). Άρα $\hat{MAT}=\hat{NTA}$, οπότε τα αντίστοιχα τόξα AN και MT (του κύκλου C_F) είναι ίσα μεταξύ τους.

Από την ισότητα των τόξων $AN=AM+MN$ και $MT=TN+MN$, προκύπτει η ισότητα των τόξων AM και TN . Άρα το τετράπλευρο $MATN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $MN \parallel AT$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $KAT\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $K\Lambda \parallel AT$. Άρα $MN \parallel K\Lambda$ και κατά συνέπεια το $MKAN$ είναι τραπέζιο και η $B\Gamma$ είναι κοινή μεσοκάθετη των παράλληλων πλευρών του.

Τα τρίγωνα AKM και $T\Lambda N$ είναι ίσα. Άρα το $MKAN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1.$$

Λύση

Περιορισμός: $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 5$. Η εξίσωση, για $x \leq 0$ ή $x \geq 5$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 + (x^2 - 5x) - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x^2 - 5x})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \quad (E_1) \quad \text{ή} \quad x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \quad (E_2)$$

$$\bullet \quad (E_1): x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x, \text{ με } x \geq 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}, x \geq 5, \text{ απορρίπτεται.}$$

$$\bullet \quad (E_2): x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 5x, \text{ με } -1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}, -1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}.$$

Πρόβλημα 2

Αν α, β ακέραιοι και ο αριθμός $A = \alpha^2 + 2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = \alpha^2 + \beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Λύση

Έστω ότι $A = \alpha^2 + 2\beta = x^2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$. Τότε $\beta = \frac{x^2 - \alpha^2}{2}$. Επειδή $\beta \in \mathbb{Z}$, πρέπει ο

αριθμητής $x^2 - \alpha^2$ να είναι άρτιος ακέραιος, το οποίο συμβαίνει μόνον όταν οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Έτσι έχουμε

$$\alpha^2 + \beta = \alpha^2 + \frac{x^2 - \alpha^2}{2} = \frac{x^2 + \alpha^2}{2} = \frac{(x+\alpha)^2 + (x-\alpha)^2}{4} = \left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2,$$

όπου οι αριθμοί $\frac{x+\alpha}{2}$ και $\frac{x-\alpha}{2}$ είναι ακέραιοι, αφού οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Πρόβλημα 3

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση

$$4x^4 + (8+4a)x^3 + (a^2+8a+4)x^2 + (a^3+8)x + a^2 = 0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} & 4x^4 + (8+4a)x^3 + (a^2+8a+4)x^2 + (a^3+8)x + a^2 \\ &= (4x^4 + 8x^3 + a^2x^2) + (4ax^3 + 8ax^2 + a^3x) + (4x^2 + 8x + a^2) \\ &= x^2(4x^2 + 8x + a^2) + ax(4x^2 + 8x + a^2) + (4x^2 + 8x + a^2) \\ &= (4x^2 + 8x + a^2)(x^2 + ax + 1). \end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς, αν, και μόνον αν, και τα δύο τριώνυμα $x^2 + ax + 1$ και $4x^2 + 8x + a^2$ έχουν πραγματικές ρίζες

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad 64 - 16a^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad a^2 - 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = -2 \text{ ή } a = 2. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4

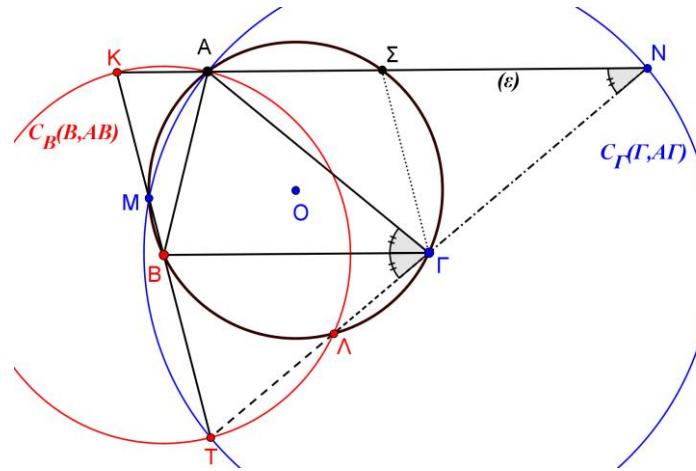
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ . Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M . Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Λ, N, T είναι συνευθειακά.

(β) Να αποδείξετε ότι οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΓAN είναι ισοσκελές ($\Gamma A = \Gamma N$ ως ακτίνες του κύκλου C_Γ). Άρα $\hat{A}\hat{N}\hat{\Gamma} = \hat{N}\hat{A}\hat{\Gamma}$.



Σχήμα 6

Από την παραλληλία $(\varepsilon) \parallel B\Gamma$ (με τέμνουσα την $A\Gamma$) έχουμε: $\hat{N}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από τις προηγούμενες ισότητες γωνιών, προκύπτει: $\hat{A}\hat{N}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$ (1).

Από την ισότητα των χορδών AB και BA του κύκλου $C(O, R)$ (οι χορδές AB και BA είναι ακτίνες του κύκλου C_B) έχουμε: $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma}$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\hat{A}\hat{N}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή τα σημεία Γ, N, Λ είναι συνευθειακά.

Η διάκεντρος $B\Gamma$ (των κύκλων C_B και C_Γ) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους AT . Άρα $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{T} = \hat{\Gamma}$. Από την ισότητα των γωνιών $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{T}$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda}$, προκύπτει ότι τα σημεία Γ, T, Λ είναι συνευθειακά, οπότε σε συνδυασμό με το προηγούμενο συμπέρασμα έπεται ότι τα σημεία Γ, Λ, N, T είναι συνευθειακά.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία B, K, M, T είναι συνευθειακά, οπότε τα σημεία B και Γ είναι μέσα των πλευρών TK και TN , αντίστοιχα, του τριγώνου TKN .

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο Σ είναι το μέσο της πλευράς KN (οπότε οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ θα συντρέχουν στο βαρύκεντρο του τριγώνου TKN).

Πράγματι, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Sigma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C(O, R)$, οπότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\hat{\Gamma}\hat{\Sigma}\hat{N} = \hat{K}\hat{A}\hat{B} \text{ (από το ισοσκελές τραπέζιο } AB\Gamma\Sigma \text{)}$$

$$\hat{K}\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{K}\hat{A} \text{ (από το ισοσκελές τρίγωνο } ABK \text{)}.$$

Άρα η $\Sigma\Gamma$ είναι παράλληλη προς την KB , δηλαδή το Σ είναι το μέσο της KN .

Παρατήρηση

Δεν είναι απαραίτητο (για την απόδειξη του δευτέρου ερωτήματος) να αποδείξουμε ότι το σημείο Λ ανήκει στην ίδια ευθεία με τα σημεία Γ, N, T .

Χρειάζεται όμως για να αποδείξουμε ότι και $AT, NM, K\Lambda$ συντρέχουν και να συμπεράνουμε ότι τα σημεία ο κύκλος $C(O, R)$ είναι ο κύκλος Euler του τριγώνου TKN .